RUMUS INTEGRAL TAK TENTU MELALUI POLA INTEGRAL

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Jurusan Matematika

oleh

<u>SUTIKA DEWI</u>
10854004458

UIN SUSKA RIAU

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2013

RUMUS INTEGRAL TAK TENTU MELALUI POLA INTEGRAL

SUTIKA DEWI
10854004458

Tanggal Sidang : 25 Juni 2013
Periode Wisuda : 2013

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Integral merupakan operasi invers atau kebalikan dari turunan (differensial). Integral terbagi mejadi 2 yaitu integral tentu dan integral tak tentu. Proses menemukan integral disebut integrasi. Ada 3 metode untuk menyelesaikan integral yaitu: pengintegralan dengan subsitusi, pengintegralan parsial dan pengintegralan fungsi rasional. Integral tak tentu memiliki berbagai macam bentuk, sehingga untuk menyelesaikannya memerlukan rumus yang tepat dalam mencari solusi integralnya. Tujuan utama penulisan skripsi ini adalah untuk mencari rumus integral. Formula tersebut diperoleh dengan melihat pola integral yang terjadi. Berdasarkan pola, maka rumus integralnya diperoleh.

Kata kunci : Integral, Pola Integral.

FORMULA INDEFINITE INTEGRAL FROM PATTERN OF INTEGRAL

SUTIKA DEWI
10654004458

Date of Final Exam : 25 Juni 2013
Graduation Ceremony Period : 2013

Department of Mathematics
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
JL. HR. Soebrantas no. 155 Pekanbaru

ABSTRACK

Integral is the inverse or opposite operation of derivative. Integral have two pattern, there are definite integral and indefinite integral. The Process for find integral is called by integration. Three methode for solving of integral are integration by subsitution, partial integration and integration of rasional functions. Indefinite integral have much variations of pattern. So, to finish it requires the right formula for the solution of the main integral. Purpose this paper is to find an integral formula is obtained by looking at the pattern of integral occuring . Based of the pattern, then the integral formula is obtained.

Keywords *: Integral, Pattern of Integral.*

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirabbil'alamin, segala puji bagi Allah SWT karena atas rahmat, taufiq dan hidayah-Nya, penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir dengan judul **"Rumus Integral Tak Tentu Melalui Pola Integral"** dengan baik dan selesai tepat pada waktunya. Shalawat beserta salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, mudah-mudahan kita semua selalu mendapat syafa'at-Nya dan selalu dalam lindungan Allah SWT amin. Penulisan Tugas akhir ini dimaksudkan untuk memenuhi salah satu syarat dalam rangka menyelesaikan studi Stata 1 (S1) di Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.

Dalam penyusunan dan penyelesaian Tugas akhir ini, penulis tidak terlepas dari bantuan berbagai pihak, baik langsung maupun tidak langsung. Untuk itu penulis mengucapkan terimakasih yang tak terhingga kepada kedua orang tua tercinta ayahanda dan ibunda yang tidak pernah lelah dalam mencurahkan kasih sayang, perhatian, do'a, dan dukungan untuk menyelesaikan Tugas akhir ini. Selanjutnya ucapan terimakasih kepada :

1. Bapak Prof. Dr. H. M. Nazir selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Ibu Dra. Hj. Yenita Morena, M.Si selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Sri Basriati, M.Sc selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
4. Ibu Yuslenita Muda, M.Sc selaku Dosen Pembimbing yang telah memberikan arahan, motivasi, dan membimbing penulis dengan penuh kesabarannya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
5. Bapak Wartono, M.Sc selaku penguji I yang telah banyak membantu, memberikan kritikan dan saran serta dukungan dalam penulisan Tugas akhir ini.

6. Bapak Nilwan Andiraja, M.Sc selaku penguji II yang telah banyak membantu, mendukung dan memberikan saran dalam penulisan Tugas akhir ini.
7. Semua dosen-dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan dukungan serta saran dalam menyelesaikan Tugas akhir ini.
8. Teman-teman Jurusan Matematika angkatan 2008 yang telah banyak memberi semangat dan memotivasi penulis untuk segera menyelesaikan penulisan skripsi ini.
9. Semua pihak dan para sahabat yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Dengan segala kerendahan hati, penulis juga menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, untuk itu kritik dan saran yang bersifat membangun sangat penulis harapkan. Kepada semua pihak yang membaca skripsi ini, semoga dapat mengambil manfaatnya. Amin.

Pekanbaru, 25 Juni 2013

Sutika Dewi

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Kalkulus mengalami perkembangan yang cukup signifikan yaitu dari zaman kuno, zaman pertengahan hingga ke zaman modern. Pada zaman kuno, beberapa pemikiran tentang kalkulus telah muncul. Banyak tokoh-tokoh Matematika yang menyumbangkan pemikirannya seperti Ibn al-Haytham, Aryabhata, Jhon Wallis, Isac Barrow, James Gregory dan masih banyak lagi. Sir Isac Newton dan Gottfried Wilhelm Leibniz adalah orang yang mempunyai kontribusi besar dalam Kalkulus. Hanya saja Newton memulai dari turunan sedangkan Leibniz sebaliknya. Leibnizlah yang pertama kali mencetuskan notasi integral pada akhir abad 17 dan dipakai hingga sekarang.

Integral merupakan salah satu topik yang terdapat pada kalkulus. Integral terbagi menjadi dua yaitu integral tentu dan integral tak tentu. Pada awalnya integral digunakan untuk menghitung luas daerah dari suatu bidang yang tak beraturan. Bernhard Riemann memberikan definisi modern tentang integral tentu sebagai limit dari penjumlahan Riemann. Secara matematis dapat dituliskan:

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i).\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx$$

Karena dedikasinya tersebut maka integral tentu disebut juga sebagai integral Riemann. Biasanya integral banyak digunakan untuk mencari luas daerah pada kurva dan untuk mengetahui volume dari benda putar. Integral tidak hanya dipergunakan dalam bidang matematika saja. Penggunaan integral dapat dijumpai di berbagai bidang. Sebagai contoh dibidang ekonomi, integral digunakan untuk menggambarkan suatu permintaan, penawaran maupun menentukan fungsi biaya dan pendapatan.

Oleh sebab itu, integral merupakan bagian terpenting dalam bidang sains. Karenanya, untuk menyelesaikan integral diperlukan banyak teknik yang dijumpai dalam bagian teknik pengintegralan. Ada beberapa teknik pengintegralan yaitu pengintegralan subsitusi, pengintegralan parsial, dan pengintegralan fungsi rasional. Jika dilihat dari bentuk integral tak tentu yang memiliki berbagai bentuk fungsi, kendala yang sering dihadapi adalah sulitnya menentukan rumus mana yang harus digunakan. Maka diperlukan rumus umum agar persoalan integral ini dapat diselesaikan dengan baik. Ada beberapa jurnal penelitian yang telah membahas integral seperti: Penyelesaian Kasus Beberapa Integral Tak Wajar dengan Integran Memuat Fungsi Eksponensial dan Fungsi Logaritma oleh Anisa Kurniawati, Penyelesaian Persamaan Integral Volterra Linear dengan Metode Fungsi Walsh dan FMV- Cycle oleh Masduki, Integral Henstock Kurzweil pada Ruang Berdimensi-n oleh Drs. Endang Dedy, M.Si dan Integrasi Numerik Menggunakan Metode Gauss Kuadratur dengan Pendekatan Interpolasi Hermit dan Polinomial Legendre oleh Sutrisno.

Berdasarkan uraian di atas, maka penulis tertarik untuk membahas integral dengan judul yang berbeda yaitu: rumus integral tak tentu dengan mengamati pola yang muncul dari beberapa fungsi yang diberikan. Sehingga berdasarkan hal tersebut penulis mengambil judul **"Rumus Integral Tak Tentu Melalui Pola Integral".**

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, maka penulis merumuskan masalah yaitu: "Bagaimana rumus integral tak tentu diperoleh melalui pola integral".

1.3 Batasan Masalah

Agar tujuan dari penelitian ini dapat dicapai dengan baik dan tepat, maka diperlukannya pembatasan masalah, di antaranya sebagai berikut:

1. Fungsi yang dapat diintegralkan atau fungsi yang mempunyai turunan.
2. Konstanta pada fungsi hanya bilangan bulat.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penulisan tugas akhir ini yaitu membuktikan dan mendapatkan rumus umum untuk integral tak tentu dari beberapa himpunan suatu fungsi.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah:

1) Menambah wawasan keilmuan dalam matematika mengenai rumus umum dari beberapa integral tak tentu.
2) Mengetahui lebih banyak tentang materi integral tak tentu, khususnya cara mendapatkan rumus integral tak tentu dengan menggunakan sistem aljabar komputer yaitu bahasa pemograman maple.
3) Membantu dalam menyelesaikan soal-soal yang berkaitan dengan integral tak tentu.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan pada tugas akhir ini terdiri dari beberapa bab yaitu:

Bab I Pendahuluan

Bab ini berisikan latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan dan manfaat penulisan, serta sistematika penulisan.

Bab II Landasan Teori

Bab ini menjelaskan tentang landasan teori yang mendukung tentang integral dan memahami komponen-komponen yang ada hubungannya dengan penelitian ini.

Bab III Metodologi

Bab ini berisikan langkah-langkah yang penulis gunakan untuk menemukan rumus integral tak tentu melalui pola integral.

Bab IV Pembahasan

Bab ini berisikan pembahasan mengenai pemaparan cara-cara dengan teoritis dalam mendapatkan hasil penelitian tersebut.

Bab V Penutup

Bab ini berisikan kesimpulan dari seluruh uraian dan saran-saran untuk pembaca.

BAB II

LANDASAN TEORI

Landasan teori ini memuat teori-teori atau materi pendukung yang akan digunakan dalam pembahasan dalam penyusunan tugas akhir. Teori-teori tersebut adalah integral, teknik pengintegralan, pola integral dan maple. Agar lebih jelas, berikut teorinya:

2.1 Integral

Integral merupakan operasi invers atau kebalikan dari turunan (differensial). Selain itu, integral bisa juga diartikan sebagai limit jumlah dan bertujuan untuk mencari luas daerah yang diarsir. Proses menemukan integral dari suatu fungsi disebut sebagai pengintegralan ataupun integrasi. Integral dibagi menjadi dua, yaitu integral tentu dan integral tak tentu. Notasi Matematika yang digunakan untuk menyatakan integral adalah ∫, seperti huruf S yang memanjang (S singkatan dari *sum* yang berarti penjumlahan).

2.1.1 Integral Tentu

Integral tentu disebut juga sebagai integral Riemann. Berikut ini merupakan definisi dari integral tentu :

Definisi 2.1 Jika f fungsi kontinu yang didefinisikan pada selang tertutup [a,b] maka:

$$\lim_{|p|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x_i$$

ada, f adalah **terintegralkan** pada [a,b]. lebih lanjut $\int_a^b f(x)\,dx$, disebut **integral tentu** (atau integral Riemann) f dari a ke b, diberikan oleh

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|p|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i).\Delta x_i$$

dengan

$f(x_i)$: Fungsi ke-i

Δx_i : $x_i - x_{i-1}$, Jarak Antar Titik-Titik Partisi

a : Batas Bawah

b : Batas Atas

Secara umum, $\int_a^b f(x)\,dx$ menyatakan batasan luas daerah yang tercakup di antara kurva $y = f(x)$ dan sumbu-*x* dalam selang [a,b], yang berarti bahwa tanda positif akan diberikan pada luas bagian-bagian yang berada dibagian atas sumbu-*x*, dan tanda negatif diberikan untuk luas bagian-bagian yang berada dibawah sumbu-*x*. secara simbolik :

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_{atas} - A_{bawah}$$

Teorema Dasar Kalkulus. Andaikan *f* kontinu pada [a,b] dan andaikan *F* sebarang anti turunan dari *f* maka,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

2.1.2 Integral Tak Tentu

Integral tak tentu atau anti turunan adalah suatu bentuk operasi pengintegralan suatu fungsi yang menghasilkan suatu fungsi baru. Fungsi ini belum memiliki nilai pasti (berupa variabel) sehingga cara pengintegralan yang menghasilkan fungsi tak tentu ini disebut integral tak tentu.

Definisi 2.2 Fungsi *F* disebut anti turunan dari *f* pada interval *I* jika $F'(x) = f(x)$ untuk semua *x* dalam *I*.

Teorema 2.1 Jika *F* anti turunan dari *f* pada interval *I*, maka anti turunan dari *f* pada *I* yang paling umum adalah:

$$F(x) + C$$

dengan C konstanta sebarang.

Bukti: Sebagai ilustrasi dari teorema, misalkan F fungsi yang didefinisikan oleh:

$$F(x) = 3x^2 + 2x - 4$$

Maka:

$$F'(x) = 6x + 2$$

Jadi, jika f fungsi yang didefinisikan oleh $f(x) = 6x + 2$, maka dapat dikatakan bahwa f merupakan turunan dari F dan F adalah anti turunan dari f.

2.2 Teknik Pengintegralan

Untuk menyelesaikan integral tak tentu yang memiliki banyak ragam bentuk, tidak cukup hanya menggunakan rumus-rumus dasar integral saja. Namun, diperlukan juga teknik-teknik pengintegralan. Ada beberapa teknik pengintegralan, yaitu pengintegralan dengan subsitusi dan pengintegralan parsial serta pengintegralan fungsi rasional. Adapun masing-masing teknik pengintegralan akan di bahas sebagai berikut:

2.2.1 Pengintegralan dengan Subsitusi

Teorema 2.2 (subsitusi). Untuk menentukan $\int f(x)\,dx$, kita dapat mensubsitusikan $u = g(x)$, dengan *g* fungsi yang dapat diintegralkan. Apabila subsitusi itu mengubah *f(x) dx* menjadi *h(u) du* dan apabila *H* sebuah anti turunan *h*, maka

$$\int f(x)\,dx = \int h(u)\,du = H(u) + C = H(g(x)) + C$$

Contoh 2.1: Tentukanlah $\int (2x + 3)\cos(x^2 + 3x)\,dx$

Penyelesaian:

Misalkan $u = x^2 + 3$

$du = (2x + 3)\,dx$

Sehingga:

$$\int (2x + 3)\cos(x^2 + 3x)\,dx = \int \cos u\,du$$
$$= \sin u + C$$
$$= \sin(x^2 + 3) + C$$

2.2.2 Pengintegralan Parsial

Apabila pengintegralan dengan metode subsitusi tidak berhasil, dengan menerapkan metode penggunaan ganda, yang lebih dikenal dengan pengintegralan parsial dapat memberikan hasil. Metode ini didasarkan pada pengintegralan rumus turunan hasil kali dua fungsi.

Andaikan $u = u(x)$ dan $v = v(x)$, maka:

$$D_x[u(x).v(x)] = u(x).v'(x) + v(x).(u'(x))$$

dengan mengintegralkan dua ruas persamaan tersebut, kita memperoleh:

$$u(x).v(x) = \int u(x).v'(x)\,dx + \int v(x).u'(x)\,dx$$

atau

$$u\ x\ .v'\ x\ dx = u\ x\ .v\ x\ - \quad v\ x\ .u'\ x\ dx$$

Karena $dv = v'\ x\ dx$ dan $du = u'\ x\ dx$, persamaan terakhir dapat ditulis sebagai berikut:

Pengintegralan parsial tak tentu

$$u\,dv = uv - \quad v\,du$$

sedangkan rumus untuk pengintegralan parsial tentu adalah :

Pengintegralan parsial tentu

$$_a^b\, u\,dv = [uv]_a^b - \, _a^b\, v\,du$$

Rumus di atas memungkinkan kita memindahkan pengintegralan $u\,dv$ pada pengintegralan $v\,du$. Pengintegralan terakhir ini tergantung pada pemilihan *u* dan *dv* yang tepat.

Contoh 2.2 : Tentukanlah $x \cos x\,dx$

Penyelesaian :

Misalkan $u = x$ $\qquad dv = \cos x$

$\qquad du = dx$ $\qquad v = \sin x$

Sehingga diperoleh:

$$u\,dv = uv - \quad v\,du$$

$$= x \sin x - \quad \sin x\,dx = x \sin x + \cos x + C$$

2.2.3 Pengintegralan Fungsi Rasional

Menurut definisi, suatu fungsi rasional adalah hasil bagi dua fungsi suku banyak (polinomial). Misalnya :

$$f\ x\ = \frac{2}{x+1\ ^3}, \qquad g\ x\ = \frac{2x+2}{x^2-4x+8},$$

$$\square\ x\ = \frac{x^5+2x^3-x+1}{x^3+5x}$$

Fungsi *f* dan *g* dinamakan fungsi rasional sejati karena derajat pembilang kurang dari derajat penyebut. Fungsi rasional tidak sejati selalu dapat ditulis sebagai jumlah suku banyak dan fungsi rasional sejati. Misalnya,

$$? \; x = \frac{x^5 + 2x^3 - x + 1}{x^3 + 5x} = x^2 - 3 + \frac{14x + 1}{x^3 + 5x}$$

untuk menjabarkan sebuah fungsi rasional $f \; x = \frac{p(x)}{q(x)}$ menjadi jumlah pecahan parsial , maka diperlukan langkah-langkah sebagai berikut :

1) Apabila $f(x)$ tak sejati, yaitu apabila derajat $p(x)$ paling sedikit sama dengan derajat $q(x)$, dibagi terlebih dahulu $p(x)$ dengan $q(x)$, maka diperoleh:

$$f \; x = suku\, banyak + \frac{N(x)}{D(x)}$$

2) Uraikan $D(x)$ menjadi hasil kali faktor-faktor linier dan kuadrat yang tak dapat lagi diuraikan menjadi faktor-faktor linier dengan koefisien riil.
3) Untuk setiap faktor yang berbentuk $(ax + b)^k$, penjabaran mungkin berbentuk:

$$\frac{A_1}{(ax + b)} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(ax + b)^k}$$

4) Untuk setiap faktor yang berbentuk $(ax^2 + bx + c)^m$, penjabaran mungkin menjadi:

$$\frac{B_1x + C_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{B_2 + C_2}{(ax^2bx + c)^2} + \cdots + \frac{B_mx + C_m}{(ax^2 + bx + c)^m}$$

5) Samakan $\frac{N(x)}{D(x)}$ dengan jumlah semua suku yang diperoleh dalam langkah 3 dan ke-4. Banyaknya konstanta yang harus ditentukan harus sama dengan derajat penyebut, yaitu *D(x).*
6) Kalikan ruas kiri dan kanan persamaan yang diperoleh dalam langkah 5 dengan *D(x).* kemudian tentukan konstanta yang harus dicari. Ini dapat diperoleh dengan 2 cara: yaitu samakan koefisien dari suku yang derajatnya sama dan subsitusikan nilai-nilai (yang sesuai) tertentu dalam variabel *x*.

Contoh 2.3: Tentukanlah $\frac{2x + 21}{2x^2 + 9x - 5} dx$

Penyelesaian:

Jabarkan terlebih dahulu fungsi rasionalnya:

$$\frac{2x+21}{2x^2+9x-5} = \frac{A}{(2x-1)} + \frac{B}{(x+5)}$$

$$\frac{2x+21}{2x^2+9x-5} = \frac{(x+5)A+(2x-1)B}{(2x-1)(x+5)}$$

Selanjutnya adalah menentukan A dan B menjadi suatu kesamaan. Untuk ini kita hilangkan pecahan, sehingga:

$$2x+21 = A(x+5) + B(2x-1)$$

$$2x+21 = Ax+5A+2Bx-B$$

$$2x+21 = x(A+2B)+5A-B$$

Untuk $A+2B=2$ maka $A=4$

$5A-B=21$ $B=-1$

Sehingga diperoleh:

$$\frac{2x+21}{2x^2+9x-5}dx = \frac{4}{2x-1}dx + \frac{-1}{x+5}dx$$

$$= 2\ln|2x-1| - \ln|x+5| + C$$

2.3 Pola Integral

Pola adalah sebuah susunan yang mempunyai bentuk teratur dari bentuk satu ke bentuk yang berikutnya. Sedangkan integral adalah operasi invers atau kebalikan dari turunan (differensial). Sehingga pola integral dapat diartikan sebagai susunan atau bentuk teratur yang terdapat dalam integral. Berikut ini merupakan contoh dari pola integral yang dapat menjadi dasar pembentukan rumusnya.

Contoh 2.4: Diberikan integral tak tentu sebagai berikut:

1. $x\,dx = \frac{1}{1+1}\,x^{1+1} = \frac{1}{2}x^2 + C$
2. $2x\,dx = \frac{2}{1+1}\,x^{1+1} = x^2 + C$
3. $3x\,dx = \frac{3}{1+1}\,x^{1+1} = \frac{3}{2}x^2 + C$
4. $4x\,dx = \frac{4}{1+1}\,x^{1+1} = 2x^2 + C$
5. $5x\,dx = \frac{5}{1+1}\,x^{1+1} = \frac{5}{2}x^2 + C$

Dari pola integral di atas dapat ditarik suatu kesimpulan bahwa rumus umum integral tersebut adalah:

$ax\,dx = \frac{a}{1+n}x^{1+n} + C$, untuk a adalah bilangan ganjil dan genap

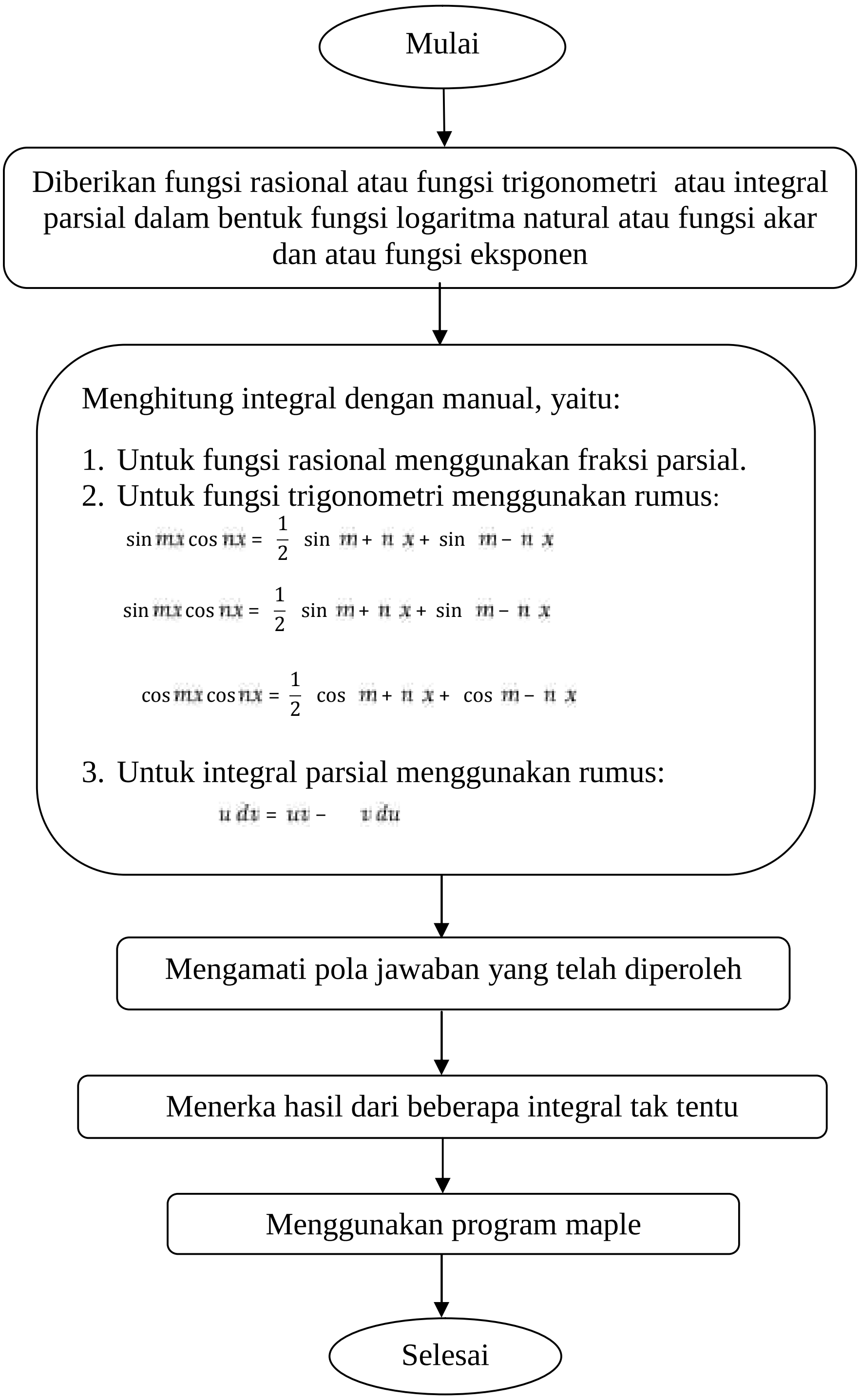
BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

Metodologi penelitian yang digunakan adalah studi literatur. Adapun langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

1. Diberikan suatu integral tak tentu yaitu dalam bentuk fungsi rasional atau fungsi trigonometri atau integral parsial dalam bentuk fungsi logaritma natural atau fungsi akar dan atau fungsi eksponen.
2. Menghitung integral dengan manual.
3. Mengamati pola integral yang muncul.
4. Menerka hasil dari beberapa integral tak tentu berdasarkan pola jawaban yang telah diperoleh.
5. Menggunakan program maple untuk memeriksa terkaan.

Langkah-langkah metode penelitian diatas dapat digambarkan dalam *flowchart* sebagai berikut:



Gambar 3.1 *Flowchart* Metode Penelitian

BAB IV

PEMBAHASAN DAN HASIL

Pada bagian ini akan dibahas mengenai bagaimana langkah-langkah untuk memperoleh suatu rumus integral tak tentu melalui pola integral dari berbagai macam fungsi yaitu: fungsi rasional, fungsi trigonometri, integral parsial dalam bentuk fungsi logaritma natural, fungsi akar dan fungsi eksponen.

4.1 Pengintegralan Fungsi Rasional

Menurut definisi, fungsi rasional adalah hasil bagi dua fungsi suku banyak atau polinomial. Bentuk umum dari fungsi rasional :

$$f\ \ x\ =\ \frac{P\ \ x}{Q\ \ x},Q\ \ x\ \neq\ 0$$

$P\ \ x$ dan $Q\ (x)$ adalah polinomial.

Berikut ini akan ditemukan rumus integral untuk fungsi rasional berdasarkan pola integral.

Contoh 4.1: Diberikan fungsi rasional sejati dengan faktor linear yang berbeda dan faktor linear berulang. Carilah pola integral berikut ini :

a. $\frac{1}{x+2\ \ \ x+3}\ dx$, dengan $a=\ 2$ genap dan $b=\ 3$ ganjil

b. $\frac{1}{x-1\ \ \ x+5}\ dx$, dengan $a=\ -1$ ganjil dan $b=\ 5$ ganjil

c. $\frac{1}{x-1\ \ \ x-5}\ dx$, dengan $a=\ -1$ ganjil dan $b=\ -5$ ganjil

d. $\frac{1}{x+2\ \ \ x-5}\ dx$, dengan $a=\ 2$ genap dan $b=\ -5$ ganjil

e. $\frac{1}{x+2\ \ 2}\ dx$, dengan $a=\ 2$ genap

Penyelesaian:

a. $\frac{1}{x+2\ \ \ x+3}\ dx$, dengan $a=\ 2$ genap dan $b=\ 3$ ganjil

$$\frac{1}{x^2+\ 5x+\ 6}=\ \frac{A}{x+\ 2}+\ \frac{B}{x+\ 3}$$

$$\frac{1}{x^2+\ 5x+\ 6}=\ \frac{A\ \ x+\ 3\ \ +\ B\,(x+\ 2)}{x+\ 2\ \ (x+\ 3)}$$

$$1 = A \quad x + 2 \quad + B\,(x + 2)$$

$$1 = x \quad A + B \quad + \quad 3A + 2B$$

Selanjutnya dapat dibentuk persamaan:

- $A + B = 0$

  $A \qquad = -B$

- $3A + 2B \quad = 1$

  $3 \ -B \ + 2B = 1$

  $-3B + 2B \quad = 1$

  $\qquad\qquad B = -1$

subsitusi nilai B ke persamaan $A = -B$, maka diperoleh nilai $A = 1$

sehingga diperoleh :

$$-\frac{1}{x+2 \quad x+3}\,dx = \quad \frac{A}{x+2}\,dx + \quad \frac{B}{x+3}\,dx$$

$$= \quad \frac{1}{x+2}\,dx + \quad \frac{-1}{x+3}\,dx$$

$$= \ln|x+2| - \ln|x+3| + C$$

b. $\frac{1}{x-1 \quad x+5}\,dx$, dengan $a = -1$ ganjil dan $b = 5$ ganjil

$$\frac{1}{x^2 + 4x + 5} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+5}$$

$$\frac{1}{x^2 + 4x + 5} = \frac{A \quad x+5 \quad + B\,(x-1)}{x-1 \ (x+5)}$$

$$1 = A \quad x + 5 \quad + B\,(x - 1)$$

$$1 = x \quad A + B \quad + \quad 5A - B$$

Selanjutnya dapat dibentuk persamaan:

- $A + B \quad = 0$

  $A \qquad = -B$

- $5A - B \ = 1$

$5 \ -B \ - B = 1$

$-5B - B = 1$

$-6B = 1$

$B = -\frac{1}{6}$

subsitusi nilai B ke persamaan $A = -B$, maka diperoleh nilai $A = \frac{1}{6}$

sehingga diperoleh:

$$-\frac{1}{x-1 \quad x+5}\,dx = \frac{A}{x-1}\,dx + \frac{B}{x+5}\,dx$$

$$= \frac{\frac{1}{6}}{x-1}\,dx + \frac{-\frac{1}{6}}{x+5}\,dx$$

$$= \frac{1}{6}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x+5| + C$$

c. $\frac{1}{x-1 \quad x-5}\,dx$, dengan $a = -1$ dan $b = -5$

$$\frac{1}{x^2 - 6x + 5} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-5}$$

$$\frac{1}{x^2 - 6x + 5} = \frac{A \quad x-5 \quad + B(x-1)}{x-1 \ (x-5)}$$

$$1 = A \quad x-5 \quad + B(x-1)$$

$$1 = x \quad A + B \quad + \quad -5A - B$$

Selanjutnya dapat dibentuk persamaan:

- $A + B = 0$

  $A = -B$

- $-5A - B = 1$

$-5 \ -B \ - B = 1$

$5B - B = 1$

$B = \frac{1}{4}$

subsitusi nilai B ke persamaan $A = -B$, maka diperoleh nilai $A = -\frac{1}{4}$

sehingga :

$$-\frac{1}{x-1 \quad x-5}\,dx = \frac{A}{x-1}\,dx + \frac{B}{x-5}\,dx$$

$$= \frac{-\frac{1}{4}}{x-1}\,dx + \frac{\frac{1}{4}}{x-5}\,dx$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{4}\ln|x-5| + C$$

d. $\frac{1}{(x+2)(x-5)}\,dx$, dengan $a = 2$ genap dan $b = -5$ ganjil

$$\frac{1}{x^2 - 3x - 10} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-5}$$

$$\frac{1}{x^2 - 3x - 10} = \frac{A(x-5) + B(x+2)}{(x+2)(x-5)}$$

$$1 = A(x-5) + B(x+2)$$

$$1 = x(A+B) - 5A + 2B$$

Selanjutnya dapat dibentuk persamaan:

- $A + B = 0$

  $A = -B$
- $-5A + 2B = 1$

  $-5(-B) + 2B = 1$

  $5B + 2B = 1$

  $B = \frac{1}{7}$

subsitusi nilai B ke persamaan $A = -B$, maka diperoleh nilai $A = -\frac{1}{7}$

sehingga diperoleh :

$$\frac{1}{(x+2)(x-5)}\,dx = \frac{A}{x+2}\,dx + \frac{B}{x-5}\,dx$$

$$= \frac{-\frac{1}{7}}{x+2}\,dx + \frac{\frac{1}{7}}{x-5}\,dx$$

$$= -\frac{1}{7}\ln|x+2| - \frac{1}{7}\ln|x-5| + C$$

e. $\frac{1}{(x+2)^2}\,dx$, dengan $a = 2$ genap

$$\frac{1}{(x+2)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2}$$

$$\frac{1}{(x+2)^2} = \frac{A \;\; x+2 \;\; + B}{x+2 \;\; (x+2)^2}$$

$$1 = A \;\; x+2 \;\; + B$$

$$1 = \;\; Ax + 2A \;\; + B$$

Selanjutnya dapat dibentuk persamaan:

- $Ax \quad = 0$

  $A \quad = 0$

- $2A + B = 1$

  $B = 1$

sehingga diperoleh:

$$\frac{1}{(x+2)^2} dx = \quad \frac{A}{x+2} dx + \quad \frac{B}{(x+2)^2} dx$$

$$= \quad \frac{0}{x+2} dx + \quad \frac{1}{(x+2)^2} dx$$

Misal: $u = x + 2$

$du = dx$

Sehingga diperoleh:

$$= \quad \frac{du}{u^2}$$

$$= -\frac{1}{u} + C$$

$$= -\frac{1}{x+2} + C$$

Berdasarkan pola jawaban yang diperoleh maka dapat dibentuk suatu rumus, yaitu:

a. $\frac{1}{x+a \quad x+b} \, dx = -\frac{\ln \; x+a}{a-b} + \frac{\ln(x+b)}{a-b} + C$

b. $\frac{1}{x+a \quad x-b}\ dx = -\frac{\ln\ x+a}{b+a} + \frac{\ln(x-b)}{b+a} + C$

c. $\frac{1}{x-a \quad x+b}\ dx = \frac{\ln\ x-a}{b+a} - \frac{\ln(x+b)}{b+a} + C$

d. $\frac{1}{x-a \quad x-b}\ dx = -\frac{\ln\ x-b}{-b+a} + \frac{\ln(x-a)}{-b+a} + C$

e. $\frac{1}{(x+a)^b}\ dx = -\frac{x+a}{b-1\ (x+a)^b} + C$; akar kembar

dengan a dan b adalah sebarang bilangan real.

4.2 Integral Trigonometri

Trigonometri berasal dari bahasa Yunani, *trigonon:* tiga sudut dan *metro*: mengukur. Jadi trigonometri adalah sebuah cabang matematika yang berhubungan dengan segitiga dan fungsi trigonometrik seperti sinus, cosinus dan tangen. Untuk kasus integral yang berbentuk fungsi trigonometri dapat diselesaikan dengan cara subsitusi dan dibarengi dengan pemakaian kesamaan trigonometri yang tepat. Ada 5 jenis integral yang sering muncul yaitu:

1. $\sin^n x\, dx$ dan $\cos^n x\, dx$. Apabila n bilangan bulat ganjil dan positif keluarkan faktor $\sin x$ atau $\cos x$ dan gunakan kesamaan $\sin^2 x + \cos^2 = 1$. Dan apabila n positif genap, gunakan rumus setengah sudut:

   $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

2. $\sin^m x \cos^n x\, dx$. Apabila m atau n ganjil positif sedangkan eksponen yang lain bilangan sebarang, keluarkan $\sin x$ tau $\cos x$ dan gunakan kesamaan:s

   $\sin^2 x + \cos^2 = 1$.

3. $\tan^n x\, dx$ dan $\cot^n x\, dx$. Dalam kasus tangen, keluarkan faktor $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$. Jika kotangen keluarkan faktor $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$.

4. $\tan^m x \sec^n x\, dx$ dan $\cot^m x \csc^n x\, dx$.

5. $\sin mx \cos\ nx\, dx$, $\sin mx \sin nx\, dx$, $\cos mx \cos nx\ dx$. Integral jenis ini digunakan dalam teori arus bolak-balik, teori perpindahan panas, dan dalam teori-teori yang menggunakan deret Fourier. Untuk menyelesaikan tersebut gunakan kesamaan:

   $$\sin mx\ \cos nx = \frac{1}{2}\ \sin\ m+n\ x + \sin\ m-n\ x$$

   $$\cos\ mx\ \sin nx = \frac{1}{2}\ \sin\ m+n\ x - \sin\ m-n\ x$$

$$\sin mx \quad \sin nx = \frac{1}{2} \quad \cos \; m - n \; x - \cos \; m + n \; x$$

$$\cos mx \quad \cos nx = \frac{1}{2} \quad \cos \; m + n \; x + \; \cos \; m - n \; x$$

Berikut ini akan ditemukan rumus integral untuk fungsi trigonometri berdasarkan pola integral.

Contoh 4.2: Carilah pola integral berikut ini:

a. $\sin x \; \cos 2x \; dx$

b. $\sin 3x \; \cos 7x \; dx$

c. $\cos 3\,x \sin 2x \; dx$

d. $\cos 3\,x \sin 5x \; dx$

e. $\sin 5\,x \sin x \; dx$

f. $\cos \; x \cos 7x \, dx$

Penyelesaian:

a) $\sin x \; \cos 2x \; dx \; = \; \frac{1}{2} \quad \sin \; m + n \; + \sin(m - n) \; dx$

$$= \frac{1}{2} \quad \sin \; x + 2x \; + \sin(x - 2x) \; dx$$

$$= \frac{1}{2} \quad \sin \; 3x \; + \sin(-x) \; dx$$

$$= \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{3} \cos 3x + \; \cos x \; + C$$

$$= -\frac{1}{6} \cos 3x + \frac{1}{2} \cos x + C$$

b) $\sin 3x \; \cos 7x \; dx = \frac{1}{2} \quad \sin \; 10x \; + \sin(-4x) \; dx$

$$= \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{10} \cos 10x + \frac{1}{4} \cos 4x \; + C$$

$$= -\frac{1}{20} \cos 10x + \frac{1}{8} \cos 4x + C$$

c) $\cos 3x \; \sin 2x \; dx = \frac{1}{2} \quad \sin \; 5x \; - \sin(x) \; dx$

$$= \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{5} \cos 5x + \; \cos x \; + C$$

$$= -\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x + C$$

d) $\cos 3x \, \sin 5x \, dx = \frac{1}{2} \quad \sin \, 8x \, - \sin(-2x) \, dx$

$$= \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{8}\cos 8x - \frac{1}{2}\cos 2x \quad + C$$

$$= -\frac{1}{16}\cos 8x - \frac{1}{4}\cos 2x + C$$

e) $\sin 5x \sin x \, dx \quad = \frac{1}{2} \quad \cos \, 4x \, - \cos 6x \, dx$

$$= \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{6}\sin 6x \quad + C$$

$$= \frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{12}\sin 6x + C$$

f) $\cos x \cos 7x \, dx = \frac{1}{2} \quad \cos \, 8x \, + \cos(-6x) \, dx$

$$= \frac{1}{2} \quad \frac{1}{8}\sin 8x + \frac{1}{6}\sin 6x \quad + C$$

$$= \frac{1}{16}\sin 8x + \frac{1}{12}\sin 6x + C$$

Berdasarkan pola jawaban yang diperoleh maka dapat dibentuk suatu rumus yaitu:

$$\sin ax \, \cos bx \, dx = -\frac{1}{2}\frac{\cos \; a+b \; x}{a+b} - \frac{1}{2}\frac{\cos \; a-b \; x}{a-b} + C$$

$$\cos ax \, \sin bx \, dx = -\frac{1}{2}\frac{\cos \; a+b \; x}{a+b} + \frac{1}{2}\frac{\cos \; a-b \; x}{a-b} + C$$

$$\sin ax \, \sin bx \, dx = \frac{1}{2}\frac{\sin \; a-b \; x}{a-b} - \frac{1}{2}\frac{\sin \; a+b \; x}{a+b} + C$$

$$\cos ax \, \cos bx \, dx = \frac{1}{2}\frac{\sin \; a-b \; x}{a-b} + \frac{1}{2}\frac{\sin \; a+b \; x}{a+b} + C$$

dengan $a \neq b$ dan $a, b \in R$.

Contoh 4.3: Carilah pola integral trigonometri berikut ini:

a. $\frac{1}{1-\cos x} \, dx$

b. $\frac{1}{1-\cos\ 2x}\ dx$

c. $\frac{1}{1-\cos\ 3x}\ dx$

d. $\frac{1}{1-\cos\ 4x}\ dx$

e. $\frac{1}{1-\cos\ 5x}\ dx$

Penyelesaian: Untuk menyelesaikan integral trigonometri digunakan metode subsitusi.

a. $\frac{1}{1-\cos x}\ dx$

Misalkan: $x = 2\ arc\tan t$ $\qquad$ $t = \tan\frac{x}{2}$

$dx = \frac{2}{1+t^2}\ dt$ $\qquad$ $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Sehingga diperoleh:

$$\frac{1}{1-\cos x}\ dx = \frac{\frac{2}{1+t^2}}{1-\frac{1-t^2}{1+t^2}}\ dt$$

$$= 2\ \frac{\frac{1}{1+t^2}}{1-\frac{1-t^2}{1+t^2}}\ dt$$

$$= 2\ \frac{1}{1+t^2}\cdot\frac{1+t^2}{2t^2}\ dt$$

$$= 2\ \frac{1}{2t^2}\ dt$$

$$= \frac{1}{t^2}\ dt$$

$$= -\frac{1}{\tan\frac{x}{2}} + C$$

b. $\frac{1}{1-\cos 2x}\ dx$

Misalkan: $2x = 2\ arc\tan t$ $\qquad$ $t = \tan\frac{2x}{2} = \tan x$

$dx = \frac{1}{1+t^2}\ dt$ $\qquad$ $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Sehingga diperoleh:

$$\frac{1}{1-\cos x}\,dx = \frac{\frac{1}{1+t^2}}{1-\frac{1-t^2}{1+t^2}}\,dt$$

$$= \frac{1}{1+t^2}\cdot\frac{1+t^2}{2t^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2t^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\quad\frac{1}{t^2}\,dt$$

$$= -\frac{1}{2\tan x} + C$$

c. $\frac{1}{1-\cos 3x}\,dx$

Misalkan: $3x = 2\,arc\tan t$ $\qquad t = \tan\frac{3x}{2}$

$dx = \frac{\frac{2}{3}}{1+t^2}\,dt$ $\qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Sehingga diperoleh:

$$\frac{1}{1-\cos 3x}\,dx = \frac{\frac{\frac{2}{3}}{1+t^2}}{1-\frac{1-t^2}{1+t^2}}\,dt$$

$$= \frac{2}{3}\quad\frac{1}{1+t^2}\cdot\frac{1+t^2}{2t^2}\,dt$$

$$= \frac{2}{3}\quad\frac{1}{2t^2}\,dt$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\quad\frac{1}{t^2}\,dt$$

$$= -\frac{1}{3\tan\frac{3}{2}x} + C$$

d. $\frac{1}{1-\cos 4x}\,dx$

Misalkan: $4x = 2\,arc\tan t$ $\qquad t = \tan 2x$

$dx = \frac{\frac{1}{2}}{1+t^2}\,dt$ $\qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Sehingga diperoleh:

$$\frac{1}{1-\cos 4x}\,dx = \frac{\frac{\frac{1}{2}}{1+t^2}}{1-\frac{1-t^2}{1+t^2}}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\quad\frac{1}{1+t^2}\cdot\frac{1+t^2}{2t^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\quad\frac{1}{2t^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\quad\frac{1}{t^2}\,dt$$

$$= -\frac{1}{4\tan 2x} + C$$

e. $\frac{1}{1-\cos 5x}\,dx$

Misalkan: $5x = 2\,arc\tan t$ $\quad t = \tan\frac{5x}{2}$

$dx = \frac{\frac{2}{5}}{1+t^2}\,dt$ $\quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Sehingga diperoleh:

$$\frac{1}{1-\cos 5x}\,dx = \frac{\frac{\frac{2}{5}}{1+t^2}}{1-\frac{1-t^2}{1+t^2}}\,dt$$

$$= \frac{2}{5}\quad\frac{1}{1+t^2}\cdot\frac{1+t^2}{2t^2}\,dt$$

$$= \frac{2}{5}\quad\frac{1}{2t^2}\,dt$$

$$= \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}\quad\frac{1}{t^2}\,dt$$

$$= -\frac{1}{5\tan\frac{5}{2}x} + C$$

Berdasarkan pola jawaban yang diperoleh maka dapat dibentuk suatu rumus, yaitu:

$$\frac{1}{1-\cos ax}\,dx = -\frac{1}{a\tan\frac{a}{2}x} + C,\ a \in R$$

4.3 Pengintegralan Parsial dalam Bentuk Fungsi Logaritma Natural

Aturan Integral parsial adalah aturan yang berkaitan dengan aturan turunan hasil kali dua fungsi. Adapun rumus umum integral parsial yaitu:

$$u\,dv = uv - \quad v\,du$$

Berikut ini akan ditemukan rumus integral untuk fungsi logaritma natural berdasarkan pola integral.

Contoh 4.4: Carilah pola integral berikut ini:

a. $\ln x\,dx$

b. $x \ln x\,dx$

c. $x^2 \ln x\,dx$

d. $x^3 \ln x\,dx$

e. $x^7 \ln x\,dx$

Penyelesaian:

a. $\ln x\,dx$

Misalkan: $u = \ln x \qquad du = \frac{1}{x}\,dx$

$dv = dx \qquad v = x$

Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \ln x\,dx &= uv - \quad v\,du \\ &= x.\ln x - \quad x.\tfrac{1}{x}dx \\ &= x.\ln x - \ x + C \\ &= x(\ln x - 1) + C \end{aligned}$$

b. $x \ln x\,dx$

Misalkan: $u = \ln x \qquad du = \frac{1}{x}\,dx$

$dv = x\,dx \qquad v = \frac{1}{2}x^2$

Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} x\ln x\,dx &= uv - \quad v\,du \\ &= \ln x.\tfrac{1}{2}x^2 - \quad \tfrac{1}{2}x^2.\tfrac{1}{x}\,dx \\ &= \tfrac{1}{2}x^2.\ \ln x - \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2}x^2 + C \\ &= \tfrac{1}{2}x^2.\ \ln x - \tfrac{1}{4}x^2 + C \end{aligned}$$

$= \frac{1}{4}x^2(2\ln x - 1) + C$

c. $x^2 \ln x\, dx$

Misalkan: $u = \ln x$ $\qquad du = \frac{1}{x}\, dx$

$dv = x^2\, dx$ $\qquad v = \frac{1}{3}x^3$

Sehingga diperoleh:

$x^2 \ln x\, dx = uv - \quad v\, du$

$= \ln x . \frac{1}{3}x^3 - \quad \frac{1}{3}x^3 . \frac{1}{x}\, dx$

$= \frac{1}{3}x^3 .\ \ln x - \frac{1}{3} . \frac{1}{3}x^2 + C$

$= \frac{1}{3}x^3 .\ \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$

$= \frac{1}{9}x^3(3\ln x - 1) + C$

d. $x^3 \ln x\, dx$

Misalkan: $u = \ln x$ $\qquad du = \frac{1}{x}\, dx$

$dv = x^3$ $\qquad v = \frac{1}{4}x^4$

Sehingga diperoleh:

$x^3 \ln x\, dx = uv - \quad v\, du$

$= \ln x . \frac{1}{3}x^3 - \quad \frac{1}{3}x^3 . \frac{1}{x}\, d$

$= \frac{1}{4}x^4 .\ \ln x - \frac{1}{4} . \frac{1}{4}x^4 + C$

$= \frac{1}{16}x^4(4\ln x - 1) + C$

e. $x^7 \ln x\, dx$

Misalkan: $u = \ln x$ $\qquad du = \frac{1}{x}\, dx$

$dv = x^7\, dx$ $\qquad v = \frac{1}{8}x^8$

Sehingga:

$x^7 \ln x\, dx = uv - \quad v\, du$

$$= \ln x . \frac{1}{8}x^8 - \quad \frac{1}{8}x^8 . \frac{1}{x}\ dx$$

$$= \frac{1}{8}x^8 . \ \ln x - \frac{1}{8} . \frac{1}{8}x^8 + C$$

$$= \frac{1}{8}x^8 . \ \ln x - \frac{1}{64}x^8 + C$$

$$= \frac{1}{64}x^8 (\ 8 \ln x - 1) + C$$

Berdasarkan pola jawaban yang diperoleh maka dapat dibentuk suatu rumus, yaitu:

$$x^n \ln x\ dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} . \ln x - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1} + C, n \in Z \text{ dan } n \neq -1$$

4.4 Pengintegralan dalam Bentuk Fungsi Akar

Bentuk akar dalam integran sering kali menimbulkan kesulitan untuk memecahkan integral yang bersangkutan. Dengan suatu subsitusi yang tepat bentuk akar itu dapat dirasionalkan. Adapun bentuk-bentuk akar yang sering muncul $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ dan $\sqrt{x^2 - a^2}$.

Contoh 4.5: Diberikan fungsi akar sebagai berikut:

a. $\sqrt{4 - x^2}\ dx$

b. $\sqrt{9 - x^2}\ dx$

c. $\sqrt{x^2 - 4}\ dx$

d. $\sqrt{x^2 - 9}\ dx$

e. $\sqrt{4 + x^2}\ dx$

f. $\sqrt{9 + x^2}\ dx$

Penyelesaian:

a. $\sqrt{4 - x^2}\ dx$

Misalkan : $x = 2 \sin t$ $\qquad t = arc \sin \frac{x}{2}$

$dx = 2 \cos t\ dt$ $\qquad \sin t = \frac{x}{2}$

$$\cos t = \frac{\sqrt{2^2 - x^2}}{2}$$

$$2 \cos t = \sqrt{2^2 - x^2}$$

$$2^2 cos^2\ t = 2^2 - x^2$$

Sehingga diperoleh:

$$\overline{4 - x^2}\, dx = \overline{2^2 - x^2}\, dx$$

$$= 2^2 cos^2\, t \cdot (\,2 \cos t\, dt)$$

$$= 4 \quad \cos t \cdot \cos t\, dt$$

$$= 4\, cos^2 t\, dt$$

$$= 4 \quad \tfrac{1}{2}\,(1 + \cos 2t\,)\, dt$$

$$= 2 \quad dt + 2 \quad \cos 2t\, dt$$

$$= 2t + \sin 2t + C$$

$$= 2\, arc\, \sin \tfrac{x}{2} + \tfrac{x}{2}\, \sqrt{4 - x^2} + C$$

b. $\overline{9 - x^2}\, dx$

Misalkan : $x = 3 \sin t$ $\qquad t = arc \sin \frac{x}{3}$

$dx = 3 \cos t\, dt$ $\qquad \sin t = \frac{x}{3}$

$$\cos t = \frac{\overline{3^2 - x^2}}{3}$$

$$3^2 cos^2\, t = 3^2 - x^2$$

Sehingga diperoleh :

$$\overline{9 - x^2}\, dx = \overline{3^2 - x^2}\, dx$$

$$= 3^2 cos^2\, t \cdot (\,3 \cos t\, dt)$$

$$= 9 \quad \cos t \cdot \cos t\, dt$$

$$= 9\, cos^2 t\, dt$$

$$= 9 \quad \tfrac{1}{2}\,(1 + \cos 2t\,)\, dt$$

$$= \frac{9}{2} \quad dt + \frac{9}{2} \quad \cos 2t \; dt$$

$$= \frac{9}{2} t + \sin 2t + C$$

$$= \frac{9}{2}\, arc \, \sin \frac{x}{3} + \frac{x}{3} \sqrt{9 - x^2} + C$$

c. $\overline{x^2 - 4}\, dx$

Misalkan : $x = 2 \cosh t$ $\qquad\qquad t = arc \cosh \frac{x}{2}$

$dx = 2 \sinh t \, dt$ $\qquad \cosh t = \frac{x}{2}$

$\sinh t = \frac{\overline{x^2 - 4}}{2}$

Sehingga diperoleh:

$$\overline{x^2 - 4}\, dx = \overline{4 \cosh^2 t - 4} \cdot 2 \sinh t \, dt$$

$$= 4 \quad \sqrt{4 \sinh^2 t \cdot \sinh dt}$$

$$= 4 \sqrt{\sinh^2} \, t \, dt$$

$$= 2 \quad (\sinh^2 t \, dt)$$

$$= 2 \quad (\cosh 2t - 1) dt$$

$$= 2 \quad \cosh 2t \, dt - 2 \quad dt$$

$$= 2 \sinh t \cdot \cosh t - 2t + C$$

$$= 2 \cdot \frac{\overline{x^2 - 4}}{2} \cdot \frac{x}{2} - 2 \, arc \, \cosh \frac{x}{2} + C$$

$$= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - 4} - 2 \, arc \, \cosh \frac{x}{2} + C \quad \text{atau}$$

$$= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - 4} - 2 \ln x \sqrt{x^2 - 4} + C$$

d. $\overline{x^2 - 9}\, dx$

Misalkan : $x = 3\cosh t$ $\qquad t = arc\cosh \frac{x}{3}$

$dx = 3\sinh t\, dt \quad \cosh t = \frac{x}{3}$

$\sinh t = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{3}$

Sehingga diperoleh:

$$\sqrt{x^2 - 9}\, dx = \sqrt{9\cosh^2 t - 9} \cdot 3\sinh t\, dt$$

$$= 9 \quad \sqrt{9\sinh^2 t \cdot \sinh} dt$$

$$= 9\sqrt{\sinh^2} t\, dt$$

$$= \frac{9}{2} \quad (\sinh^2 t\, dt)$$

$$= \frac{9}{2} \quad (\cosh 2t - 1) dt$$

$$= \frac{9}{2} \quad \cosh 2t\, dt - 2 \quad dt$$

$$= \frac{9}{2} \sinh t \cdot \cosh t - 2t + C$$

$$= \frac{9}{2} \cdot \frac{\sqrt{x^2-9}}{3} \cdot \frac{x}{3} - \frac{9}{2}\, arc \cosh \frac{x}{3} + C$$

$$= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - 9} - \frac{9}{2}\, arc \cosh \frac{x}{3} + C \quad \text{atau}$$

$$= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - 9} - \frac{9}{2} \ln x \sqrt{x^2 - 4} + C$$

e. $\sqrt{4 + x^2}\, dx$

Misalkan : $x = 2\sinh t$ $\qquad t = arc\sinh \frac{x}{2}$

$dx = 2\cosh t\, dt \qquad \sinh t = \frac{x}{2}$

$\cosh t = \frac{\sqrt{4+x^2}}{2}$

Sehingga diperoleh:

$$\sqrt{4+x^2}\,dx = 2\cosh t \cdot \sqrt{4\sinh^2 t + 4}\,dt$$

$$= 4 \cosh t \cdot \cosh t\, dt$$

$$= 4\cosh^2 t\; dt$$

$$= 2\,(\cosh^2 2t + 1)\,dt$$

$$= 2 \cosh t\, dt + 2\; dt$$

$$= 2\sinh t \cosh t + 2t + C$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{4+x^2} + 2\,arc\sinh\frac{x}{2} + C$$

f. $\sqrt{9+x^2}\,dx$

Misalkan : $x = 3\sinh t$ $\qquad t = arc\sinh\frac{x}{3}$

$dx = 3\cosh t\,dt$ $\qquad \sinh t = \frac{x}{3}$

$\cosh t = \frac{\sqrt{9+x^2}}{3}$

Sehingga diperoleh :

$$\sqrt{9+x^2}\,dx = 3\cosh t \cdot \sqrt{9\sinh^2 t + 9}\,dt$$

$$= 9 \cosh t \cdot \cosh t\, dt$$

$$= 9\cosh^2 t\; dt$$

$$= \frac{9}{2}\,(\cosh^2 2t + 1)\,dt$$

$$= \frac{9}{2}\cosh t\, dt + \frac{9}{2}\; dt$$

$$= \sinh\frac{9}{2}t + \frac{9}{2}t + C$$

$$= \frac{9}{2}\sinh t\cosh t + \frac{9}{2}t + C$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{9 + x^2} + \frac{9}{2}\text{ arc sinh }\frac{x}{3} + C$$

Berdasarkan pola jawaban yang diperoleh maka dapat dibentuk suatu rumus, yaitu:

$$\sqrt{a^2 - x^2}\; dx = \frac{a^2}{2}\text{ arc sin }\frac{u}{a} + \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + C$$

$$\sqrt{x^2 - a^2}\; dx = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\ln u\sqrt{u^2 - a^2} + C$$

$$\sqrt{a^2 + x^2}\; dx = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 + x^2} + \frac{a^2}{2}\text{ arc sinh }\frac{x}{a} + C$$

dengan a adalah bilangan bulat.

4.5 Pengintegralan dalam Bentuk Fungsi Eksponen

Secara umum, fungsi eksponen adalah fungsi yang berbentuk:

$$f\;x = a^x$$

dengan a suatu konstanta positif.

Contoh 4.6: Carilah pola integral fungsi eksponen dengan a bilangan bulat positif berikut ini:

a. $x\, e^x\; dx$
b. $x^2\, e^x\; dx$
c. $x^3\, e^x\; dx$

Penyelesaian:

a. $x\, e^x\; dx$

Misalkan: $u = x$ $\qquad du = dx$

$dv = e^x\, dx \qquad v = e^x$

Maka:

$$x\, e^x\; dx = x\, e^x - e^x dx$$

$$= x\, e^x - e^x + C$$

$$= e^x \; x - 1 \; + C$$

b. $x^2 \, e^x \; dx$

Misalkan: $u = x^2$ $\qquad du = 2x \, dx$

$dv = e^x \, dx$ $\qquad v = e^x$

Sehingga diperoleh:

$$x \, e^x \; dx \qquad = x^2 \cdot e^x - \quad e^x \cdot 2x \, dx$$

$$= x^2 \cdot e^x - 2 \quad x \cdot e^x + C$$

Karena $x \, e^x \; dx = x \, e^x - e^x + C$, maka:

$$x^2 \cdot e^x \; dx \;=\; x^2 \cdot e^x - 2 \; x \, e^x - e^x \; + C$$

$$= x^2 \cdot e^x - 2xe^x - e^x + C$$

$$= e^x \; x^2 - 2x + 2 \; + C$$

c. $x^3 \, e^x \; dx$

Misalkan: $u = x^3$ $\qquad du = 3x^2 \, dx$

$dv = e^x \, dx$ $\qquad v = e^x$

Karena $x \, e^x \; dx$ dan $x^2 \cdot e^x \; dx$ telah diperoleh dari perhitungan sebelumnya, maka diperoleh:

$$x^3 \, e^x \; dx = x^3 \, e^x - 3 \, (x^2 \, e^x - 2xe^x - e^x) + C$$

$$= x^3 \, e^x - 3 \, x^2 \, e^x - 2xe^x - e^x + C$$

$$= e^x - (x^3 \, e^x - 3xe^2 + 6x - 6) + C$$

Berdasarkan pola jawaban yang diperoleh maka dapat dibentuk suatu rumus yaitu:

$$x^n \, e^x \; dx = -(-1)^{-n} (x^n ((-1)^n \; n \cdot \Gamma \;\; n \; (-x)^{-n} - x^n \, e^x - \; x^n \, (-1)^n \; n \, (-x)^{-n} \, \Gamma \, (n, -x))$$

dengan $n = 1,2,3,\ldots$

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab IV, diperoleh suatu rumus integral tak tentu melalui pola integral dari berbagai fungsi yaitu: fungsi rasional, fungsi trigonometri, integral parsial dalam bentuk fungsi logaritma natural, integral dalam bentuk fungsi akar dan integral dalam bentuk fungsi eksponen. Langkah-langkah untuk mendapatkan rumus tersebut adalah: menghitung masing-masing integral dengan manual kemudian mengamati pola integral yang terjadi dan menerka hasil serta memeriksa terkaan dengan menggunakan program Maple. Adapun rumus tersebut adalah sebagai berikut:

1. Pengintegralan fungsi rasional:

   a. $\frac{1}{x+a \quad x+b}\, dx = -\frac{\ln\ x+a}{a-b} + \frac{\ln(x+b)}{a-b} + C$

   b. $\frac{1}{x+a \quad x-b}\, dx = -\frac{\ln\ x+a}{b+a} + \frac{\ln(x-b)}{b+a} + C$

   c. $\frac{1}{x-a \quad x+b}\, dx = \frac{\ln\ x-a}{b+a} - \frac{\ln(x+b)}{b+a} + C$

   d. $\frac{1}{x-a \quad x-b}\, dx = -\frac{\ln\ x-b}{-b+a} + \frac{\ln(x-a)}{-b+a} + C$

   e. $\frac{1}{(x+a)^b}\quad dx \quad = -\frac{x+a}{b-1\ (x+a)^b} \quad + \quad$ C; akar kembar

dengan a dan b adalah sebarang bilangan real.

2. Pengintegralan fungsi trigonometri:

   a. $\sin ax\ \cos bx\ dx = -\frac{1}{2}\frac{\cos\ \ a+b\ x}{a+b} - \frac{1}{2}\frac{\cos\ \ a-b\ x}{a-b} + C$

   $\cos ax\ \sin bx\ dx = -\frac{1}{2}\frac{\cos\ \ a+b\ x}{a+b} + \frac{1}{2}\frac{\cos\ \ a-b\ x}{a-b} + C$

   $\sin ax\ \sin bx\ dx = \frac{1}{2}\frac{\sin\ \ a-b\ x}{a-b} - \frac{1}{2}\frac{\sin\ \ a+b\ x}{a+b} + C$

   $\cos ax\ \cos bx\ dx = \frac{1}{2}\frac{\sin\ \ a-b\ x}{a-b} + \frac{1}{2}\frac{\sin\ \ a+b\ x}{a+b} + C$

b. $\frac{1}{1-\cos ax}\,dx = -\frac{1}{a\tan\frac{1}{2}x} + C$

3. Pengintegralan parsial dalam bentuk fungsi logaritma natural:

$$x^n \ln x\, dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}.\ln x - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1} + C,\ n \in Z \text{ dan } n \neq -1$$

4. Pengintegralan dalam bentuk fungsi akar

a. $\overline{a^2 - x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\text{arc sin}\frac{u}{a} + \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + C$

b. $\overline{x^2 - a^2}\,dx = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\ln u\sqrt{u^2 - a^2} + C$

c. $\overline{a^2 + x^2}\,dx = \frac{u}{2}\ \overline{u^2 + x^2} + \frac{a^2}{2}\text{arc sinh}\frac{x}{a} + C$

dengan a adalah bilangan bulat.

5. Pengintegralan dalam bentuk fungsi eksponen

$$x^n e^x\,dx = -(-1)^{-n}(x^n((-1)^n n \cdot \Gamma\ n\ (-x)^{-n} - x^n e^x - x^n(-1)^n n(-x)^{-n}\Gamma(n,-x))$$

dengan $n = 1, 2, 3, \ldots$

5.2 Saran

Tugas akhir ini, penulis membahas tentang rumus integral tak tentu melalui pola integral. Bagi pembaca yang berminat untuk membahas lebih lanjut tentang rumus melalui pola integral, maka disarankan untuk membahas rumus turunan.

DAFTAR PUSTAKA

Abbot, Paul dan Hugh Neill. “*Trigonometri*”. Jakarta. Pakar Raya. 2010.

Ayres, Frenk dan Elliot Mendelson. “*Kalkulus*”, Edisi keempat. Erlangga, Jakarta. 2006.

Baysuni, Hasyim. “*Kalkulus*”. Universitas Indonesia. Jakarta. 2008.

Budi Nugroho, Didit. “*Kalkulus Integral dan Aplikasinya*”. Yogyakarta. Graha Ilmu. 2012.

J, Purcell, Edwin dan Dale Varberg. “*Kalkulus dan Geometri Analitis*”. Edisi kelima. Erlangga. Jakarta. 1987.

Munir, Rinaldi. “*Metode Numerik*”. Informatika. Bandung. 2006.

Rezeki Dwi Putranti, Sri. “*Integral 1000 Soal dan Penyelesaiannya untuk Perguruan Tinggi*”. Jakarta. PT. Rineka Cipta. 1999.

Sahid. “*Penggunaan Maple untuk Pembelajaran Aljabar*”. FMIPA UNY. 2003.

Stewart, James. “*Kalkulus*”. Edisi keempat. Erlangga, Jakarta. 2001.

Wikipedia. Diakses pada tanggal 22 November 2012.

.